

磁気探査入門講座



日本物理探査(株)技術顧問
産業技術総合研究所客員研究員

中塚 正

1999年 ヴェスヴィオ火山の山頂火口にて

2. 基礎理論

2.1 クーロンの法則と磁場・ポテンシャル

地下の磁氣的構造がもたらす磁気異常分布を求める際の理論的基礎は、磁気に関するクーロンの法則です。

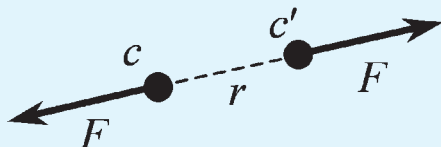


図4 クーロンの法則

距離 r だけ離れた2つの点磁荷 c 、 c' の間には、

$$F = -k(c c' / r^2) \quad (1)$$

なるクーロン力 F が働きます。正の磁荷は磁石のN極、負の磁荷は磁石のS極を表し、(1)式は c と c' が同符号のとき斥力(反発力)が働くことを意味します。ここで、 k はCGS電磁単位系(emu)では1、MKSA有理単位系では真空の透磁率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} (\text{H/m})$ を用いて $1/(4\pi \mu_0)$ と与えられる定数です。比例定数 k が単位系で異なるのは、

(a)emuでは $\mu_0=1$ を論理体系の基礎に据えたこと、

(b)MKSA単位系では、点磁荷 m から発した m 本の磁力線がその点から発散して、距離(半径)1の球面上での密度はその表面積 4π で割り算して $m/4\pi$ と考える(有理化)のに対し、emuでは磁荷とクーロン力の関係式(1)を単純化($k=1$)したことに

よります。

ここでは原則として、今日の国際単位系SIの基礎になっているMKSA単位系[$k = 1/(4\pi \mu_0)$]を用います。

磁場とは、テスト的に小さな磁荷 c' をその場所に持ってきたときに、そのテスト磁荷が力を受ける状態を指し、磁場 H があると

$$F = c' H \quad (2)$$

なる力(ベクトル)が作用すると考えられます。そこで、(1)式の c' を、点磁荷 c からの相対位置 r に置かれたテスト磁荷だと考えると、点磁荷 c が、

$$H_c = k(c/r^2)(r/r) = k(cr/r^3) \quad (3)$$

なる磁場 H_c をつくっていることを意味します。この式はさらに、スカラーポテンシャル U_c とベクトル微分演算子 $\nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ を用いて

$$H_c = -\nabla U_c, \quad U_c = kc/r \quad (4)$$

と書くことができます。その導出は、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ から $\partial r/\partial x = x/r$ となり、 $\nabla r = r/r$ であることを理解すれば容易です。このように時間変化のない静磁場については、ベクトル場の代わりに、スカラーポテンシャルを用いて表現できます。

一方、自然界には独立の磁荷は存在せず、必ずN極とS極のペアとして現れ、一般に磁気ダイポールの分布を考察する必要があります。単一の点磁気ダイポールモーメント j (その方向の単位ベクトルを p とする)を考えると、その磁気ポテンシャル U_d は、点磁荷のポテンシャル U_c を p 方向に微分($-p \cdot \nabla$)した形となり、

$$U_d = -(p \cdot \nabla)(kj/r) = (j/4\pi \mu_0)(p \cdot r)/r^3 \quad (5)$$

と与えられます。ここで、磁気ダイポールモーメントのもとでは微視的には環電流であり、その電流の流路が取り囲む面積と電流値の積として磁気モーメントが規定されます。磁気ダイポールモーメント j と磁気モーメント m は本質的に同じもので、 $j = \mu_0 m$ の関係にあります。

2.2 磁性体の磁化・帯磁率と国際単位系SI

磁性体の性質のうち、残留磁化は外から加わっている磁場と関係なく自発的に磁気ダイポールを形成するものですが、誘導磁化は外から磁場が加わったときにその磁場に感応して誘導されます。

透磁率 μ の磁性体が磁場 H の中に置かれたとき、誘導磁化 M が生じ、磁性体内部の磁束密度 B は、

$$B = \mu H = \mu_0(H + M) \quad (6)$$

で与えられますが、誘導磁化の生じ易さの指標として帯磁率 κ (磁化率とも呼ぶ)が用いられ、

$$M = \kappa H, \quad \mu = \mu_0(1 + \kappa) \quad (7)$$

の関係にあります。

しかし、この表記は国際単位系SIに合わせたものであり、従来のMKSA単位では、 $J = \mu_0 M$ を磁化と呼んでいた。今では区別して J を磁気分極と呼びます。

$$B = \mu H = \mu_0 H + J \quad (6a)$$

$$J = \kappa \mu_0 H, \quad \mu = \mu_0(1 + \kappa) \quad (7a)$$

であり、磁気分極 $\mathbf{J}$ の単位は磁束密度 $\mathbf{B}$ と同じ[T(テスラ)=Wb/m²]ですが、磁化 $\mathbf{M}$ には磁場 $\mathbf{H}$ と同じ単位[A/m]を用います。なお、磁化率 κ は無次元量で本質的には単位系にかかわらずあるのですが、先に述べた非有理化単位系の問題があり、旧来のemuではSI/MKSA単位系での値の $1/4\pi$ になっています。(前回の)図2で帯磁率の図表示が“(SI)/ 4π ”で表示されているのは、その名残です。

2.3 3次元形状のソースモデルの磁気異常

では、地下にある形状の磁性体が存在したときに、観測される磁気異常はどのように表現できるでしょうか。

ソースの大きさがとても小さく点とみなせるなら、(5)式の点ダイポールのポテンシャルからすぐに計算できますが、一般にはソースが体積分布するので、これを体積分(∫ dV)してポテンシャルが求まります。その磁気異常ベクトル $\mathbf{H}_a$ は、誘導磁化ばかりでなく残留磁化も含めた磁化の大きさを $\mathbf{M}$ 、その方向を $\mathbf{p}$ で表わすと、

$$\mathbf{H}_a = -\nabla U_m, \quad (8)$$

$$U_m = -(M/4\pi) \oint [(\mathbf{p} \cdot \nabla)(1/r)] dV \quad (9)$$

となり、少し変形すると

$$\mathbf{H}_a = (1/4\pi) \mathbf{M} \mathbf{f}, \quad (10)$$

$$\mathbf{f} = \oint [\nabla (\mathbf{p} \cdot \nabla)(1/r)] dV \quad (11)$$

と書けます。この(11)式は、よく見れば分るように無次元の量となっていて、ソースの形を特徴づけるものでgeometric factor(幾何係数)と呼ばれます。使用する長さの単位に関らず相似関係が成り立てば、等しい磁場強度になることを意味します。

この異常磁場 $\mathbf{H}_a$ の特定方向の成分は、 $\mathbf{H}_a$ とその方向の単位ベクトルとの内積で与えられますが、この異常磁場が大局的な地球磁場に重畳したときに全磁力測定に現れる変化すなわち全磁力異常 A は、 $\mathbf{H}_a$ の大きさが地球磁場に比して十分小さいとき、その地球磁場方向の成分で与えられ、地球磁場方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}$ とすると、幾何係数 $F = \mathbf{e} \cdot \mathbf{f}$ を用いて、

$$A = \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_a = (1/4\pi) M F, \quad (12)$$

$$F = \oint [(\mathbf{e} \cdot \nabla)(\mathbf{p} \cdot \nabla)(1/r)] dV \quad (13)$$

と表されます。なお、ここでは磁気探査が大きく発展した時代から主たる計測法になった全磁力探査を念頭において、式を掲げていますが、磁場の特定の方向成分の理論式は、その方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}$ に与えれば済みます。例えば、鉛直(z 方向)成分であれば、

$$H_z = \mathbf{z} \cdot \mathbf{H}_a = (1/4\pi) M F_z, \quad (12a)$$

$$F_z = \oint [(\partial/\partial z)(\mathbf{p} \cdot \nabla)(1/r)] dV \quad (13a)$$

となります。

ソース磁化

$$\mathbf{M} = M \mathbf{p} \quad (\mathbf{p}: \text{磁化方向})$$

ポテンシャル

$$U_m = -\oint (M/4\pi) [(\mathbf{p} \cdot \nabla)(1/r)] dV$$

磁気異常(ベクトル)

$$\mathbf{H}_a = -\text{grad } U_m = -\nabla U_m$$

全磁力異常

$$A = -(\mathbf{e} \cdot \nabla) U_m \quad (\mathbf{e}: \text{地磁気方向})$$

特定方向(z)成分

$$H_z = -\frac{\partial U_m}{\partial z}$$

図5 磁気ポテンシャルと磁気異常の関係式

地球電磁気学の分野では、歴史的にemu単位系が用いられてきたこともあって、慣用的に磁場強度 $\mathbf{H}$ をそれに相当する磁束密度 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ で表現し、emuの単位で $10^{-5} \Gamma$ (ガウス)=1 γ(ガンマ)が多用されてきました。国際単位系SIへの移行にあたっては、たまたま1 γがちょうど $10^{-9} \text{T} = 1 \text{nT}$ に等しいので、単に1 γを1 nTに読み替えるだけで移行が行われました。

上の(10)、(12)式で与えられる磁気異常は磁場の値であり、磁化強度 $\mathbf{M}$ の単位が[A/m]なら、磁気異常 $\mathbf{H}_a$ 、 A の単位も[A/m]です。慣用に従ってnT単位の値を得るには μ_0 を掛算($\mathbf{H}_a' = \mu_0 \mathbf{H}_a$, $A' = \mu_0 A$)する必要がありますが、その結果はより簡単な次の式になります。

$$\mathbf{H}_a' = 100 M \mathbf{f} \quad [\text{nT}], \quad (10b)$$

$$A' = 100 M F \quad [\text{nT}] \quad (12b)$$

スペースの都合で、具体的なモデルの幾何係数の計算式を掲げることはしませんが、単純な形状の場合の式の形としては、3次元(体積を持つ)形状の場合に自然対数ln・逆三角関数arctanが現れるものの、それ以外ではパラメータ値の有理関数(多項式分数表現)になります。必要に応じて「物理探査ハンドブック」第9章 磁気探査(分冊4)を参照して下さい。

磁気異常の特徴は、ソースの磁化方向と標準地球磁場方向に依存して大きく変わりますので、独立した磁気異常ソースの典型例として、点磁気ダイポール(一様帯磁球と等価)による磁気異常分布を重力異常と対比して図6に示します。(a)は日本のような中緯度域での全磁力異常パターン、(b)は中緯度域での鉛直成分異常、(c)は北極・南極の近くでの異常パターンを示すもので、いずれも地球磁場と同じ方向に磁化されたモデルを想定していますが、(b)は極地(地磁気伏角90度)で磁化方向が斜め方向の場合と同じになります。また、このソースと同じ位置・形状の密度異常があったときに期待される重力異常が(d)になります。

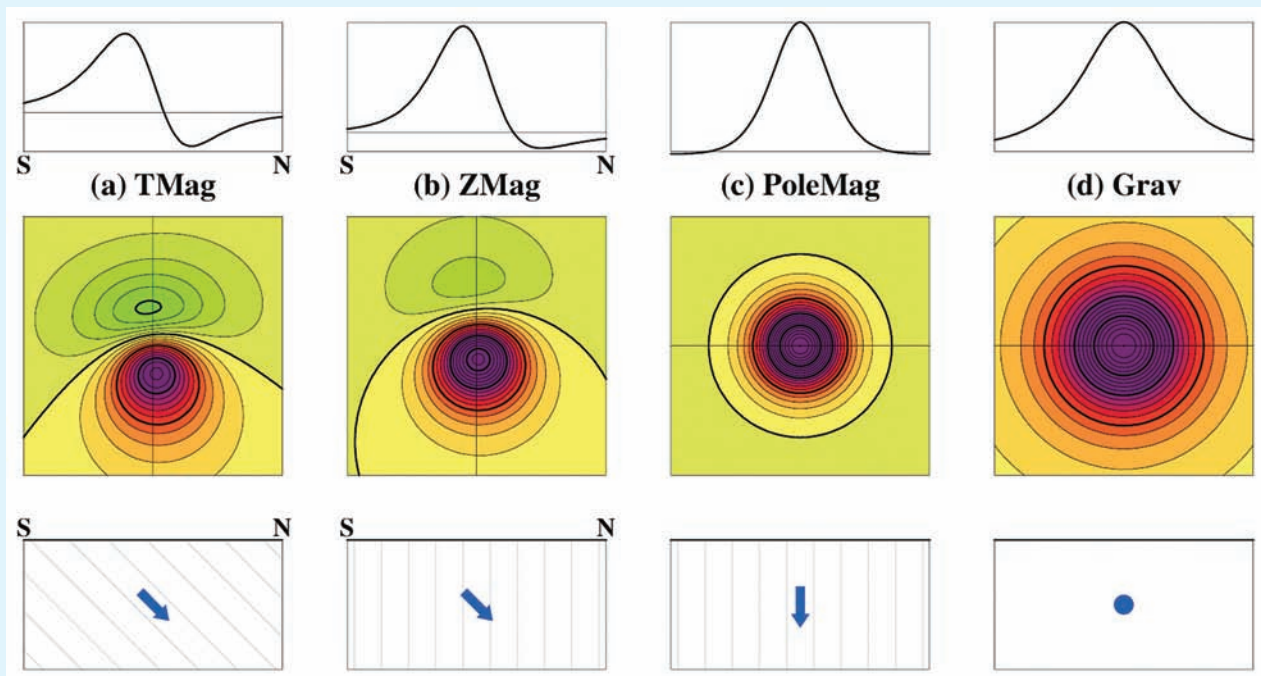


図6 孤立ソースの磁気異常

中緯度域(伏角45度、偏角7度)における(a)全磁力異常、(b)鉛直成分異常と(c)極域(伏角90度)における(極磁力)異常、および(d)同じ位置関係の重力異常。(いずれも点ダイポール/点質量ソースで計算)

2.4 ラプラス方程式と調和関数

磁気探査によって磁気異常分布が得られたとき、その様子を平面図(磁気図)の形で表現するだけでも地下の磁気的なソースを推定するのに利用できますが、その中から注目したい成分や特徴量を抽出するために、2次元のフィルタ処理がしばしば行われます。また、磁気異常がスカラーポテンシャルから導かれるという特徴を利用した数学的処理によって、ソースの特徴をよりわかり易く表現するために別の物理量を導くような処理が可能になります。

そういった処理の基礎になるのが、ポテンシャル場の理論です。磁気的地下構造が複雑であっても、そのつくる場 $\mathbf{H}_a$ は、(9)式の体積積分やその重ね合わせによるポテンシャル U を用いて、 $\mathbf{H}_a = -\nabla U$ で表現されます。この式はベクトルを意味しており、そのdivergence(発散)の微分操作($\nabla \cdot$)を行うと、ラプラス演算子 $\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla$ を用いて、

$$\text{div } \mathbf{H}_a = \nabla \cdot \mathbf{H}_a = -(\nabla \cdot \nabla) U = \Delta U \quad (14)$$

と表わせます。

ここで、 ΔU について考えると、ソースが点磁荷($U = U_c$)の場合も点磁気ダイポール($U = U_d$)の場合も、(4)、(5)式を代入して計算すればわかるように、 $r=0$ のソース位置を除いて $\Delta U = 0$ が成り立っています。このことを「 U がラプラス方程式を満たす」と言います。ラプラス方程式を満たす物理量は、その性質がよく調べられていて、その成果が適用できるからです。

ソースが点でなく体積分分布する場合には、その体積積分は

ベクトル $\mathbf{r}$ の始点(根もと)に関する積分なのに対して、 ∇ に代表される空間微分は $\mathbf{r}$ の終点(先端)に関する微分であることを考慮すると、ソースが存在しないすべての領域について $\Delta U = 0$ が成り立ちます。(これは、Maxwell方程式の $\text{div } \mathbf{B} = 0$ と同じ意味になります。)

また、 $\mathbf{H}_a$ は $-\nabla U$ で与えられているため、そのrotation(回転)の微分操作($\nabla \times$)は恒等的に $\mathbf{0}$ ($\text{rot grad} \equiv \mathbf{0}$) であり、結局、 $\text{div } \mathbf{H}_a = 0$, $\text{rot } \mathbf{H}_a = \mathbf{0}$ となるため、

$$\Delta \mathbf{H}_a = \text{grad div } \mathbf{H}_a - \text{rot rot } \mathbf{H}_a = \mathbf{0}, \quad (15)$$

つまり $\mathbf{H}_a$ の各方向成分もラプラス方程式を満たしています。

では全磁力測定の磁場強度はどうでしょうか? 磁場3成分を H_x, H_y, H_z とすると、点磁荷モデルで計算してみると全磁力 $F = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}$ のラプラシアン ΔF は0値をとることはなく、全磁力値そのものがラプラス方程式を満たさないことは明らかです。しかし、前節に示したように、大域的に一定ベクトルとみなせる優勢な地球磁場の上に、相対的に弱い異常磁場が重畳しているとみなし得る場合には、近似的に全磁力異常は磁気異常ベクトル $\mathbf{H}_a$ の地球磁場方向成分 $\mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_a$ に等しくなり、ラプラス方程式を満たします。この近似は、5万nT前後の地磁気のなかに振幅2000nT程度以下の磁気異常が存在する条件では、非常に精度の高い近似であり、多くの解析理論がこの近似を基に組み立てられています。これは、重力異常の解析理論でその鉛直成分だけを考慮してスカラーで議論するのと同質的に同じものです。

以上のように、磁気異常ベクトルのある方向成分はラプラス方程式を満たし、調和関数理論が適用できます。例えば、その空間分布の一般形は、デカルト座標系では $\exp(\alpha x + \beta y + \gamma z)$ [$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$]の一次結合で表わされます。今、 z 軸を鉛直下方にとり、 $z > 0$ にのみソースが存在する場合を考えると、空中 $z \leq 0$ において、 x, y 方向の波数 m, n を用いて (i を虚数単位 $\sqrt{-1}$ とする)

$$f(x, y, z) = \iint c(m, n) \exp(imx + iny + z\sqrt{m^2 + n^2}) \times dmdn \quad (16)$$

と記述できます。

2.5 周波数領域と2次元フィルタ操作

2次元分布 $f(x, y)$ に対するフィルタ操作は、重み関数 $w(x, y)$ を用いてコンボリューション積分

$$q(x, y) = \iint w(\xi, \eta) f(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (17)$$

で表わされます。ここで、 f の2重フーリエ変換を

$$F(m, n) = \frac{1}{2\pi} \iint f(x, y) \exp(-imx - iny) dx dy \quad (18)$$

と定義すると、その逆変換は

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint F(m, n) \exp(imx + iny) dmdn \quad (19)$$

であり、 q, w の2重フーリエ変換を Q, W とすると、

$$Q(m, n) = W(m, n) F(m, n) \quad (20)$$

が導かれます。つまり、コンボリューションは周波数領域（裏領域）でのかけ算で表現され、 W がその周波数特性を示します。従って、周波数特性がより明確なフィルタの操作には、この裏領域での処理が行われます。

ここで、(16)式で $z = 0$ の場合を考えると、この式はフーリエ逆変換の式と見ることができ、 $c(m, n)$ は $f(x, y, 0)$ のフーリエ変換相当の

$$c(m, n) = \frac{1}{4\pi^2} \iint f(x, y, 0) \exp(-imx - iny) dx dy \quad (21)$$

であることがわかります。

(16)式は、空間座標についての微分積分に対して単純な形をしており、例えば、 z での2階偏微分（鉛直2次微分） f_{zz} は、右辺の積分の内側に $(m^2 + n^2)$ をかけること

$$f_{zz}(x, y, 0) = \iint (m^2 + n^2) c(m, n) \exp(imx + iny) \times dmdn \quad (22)$$

で求められます。また、(16)式の z を $z-h$ に置き直したものは、 h だけ高い位置での磁気異常分布（上方接続）を意味し、右辺積分の内側に $\exp(-h\sqrt{m^2 + n^2})$ をかける

$$f(x, y, -h) = \iint \exp(-h\sqrt{m^2 + n^2}) c(m, n) \times \exp(imx + iny) dmdn \quad (23)$$

ことによって計算できることがわかります。

このようなフーリエ分析による解析は、フーリエ係数を効率よく計算するFFTの技術が開発されて、とくに発展しましたが、磁場計測が一定高度の平面で行われていることが必要です。固定翼航空機を用いた広域空中磁気探査データの解析には、とくに威力を発揮したようですが、近年多くなった高分解能探査では、山岳地域の地形に沿った飛行を行うために、平面での計測の条件が満たせません。その場合には元のラプラス方程式に立ち返って解析法を再構築することになります。

ここでは導出法は省略しますが、例えば上方接続の計算は、曲面 $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ 上での $f(\xi, \eta)$ の分布から、

$$u(x, y, z, \xi, \eta) = \frac{-(z - \zeta)}{2\pi[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}} \quad (24)$$

$$f_{up}(x, y, z) = \iint u(x, y, z, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (25)$$

のコンボリューション積分形式で求めることができます。

2次元フィルタは、目的にあわせて種々のものが考えられ、めざす周波数特性に合わせて設定することも可能ですが、物理的な意味が明確なフィルタが好まれるようです。以前からよく使われているものとして、鉛直2次微分・上方接続・極磁力変換があげられます。

鉛直2次微分については、重力異常の場合にはその0値の線が、水平方向に密度コントラストのある所つまり異常岩体の形状を示すことを利用する目的がありましたが、全磁力異常の場合にはあてはまらず、ほぼ短波長成分を抽出する意味に用いられます。

上方接続は、鉛直2次微分とは対照的に長波長成分を抽出する目的で、ソース深度が深くなった場合の異常パターンへの変換として用いられます。また、近年の山岳地域の地形に沿った調査において、実飛行高度が滑らかな曲面を構成しない場合に、細かな高度の凹凸の影響を除去する目的で(24)、(25)式に基づいたフィルタ処理が用いられます。

また、ソースの浅深によって周波数特性が異なる点を利用した解析としては、計算されたフーリエ係数に対して、特徴的な境界の位置を定めて2分割し、そのそれぞれから深部構造と浅部構造それぞれの磁気異常を分離して求めることがしばしば行われます。

極磁力変換は、中低緯度域での全磁力異常等が単一ソースでも双極型(図6a)のパターンを示し、データの解釈の上でソースとの対応づけが容易でないため、それを単極型(図6c)に変換する操作です。変換には地磁気と磁化の方向を与える必要があり、磁化方向に妥当な範囲の仮定を持ち込んで解析を進めることになります。

(つづく)

編集者注：物理探査ニュースNo.15の表紙図を図3とみなして、本号では図番号を図4からとしております。