

Ribbon Model の全磁力異常理論式の導き方

中 塚 正*・村 上 裕*

1. はじめに

GRANT and WEST (1965) は, Ribbon Model の磁気異常の理論式を示している。小山 (1980) は, その理論式に誤りがあると述べ別の理論式を提示したが, 村上・中塚 (1981) は, 小山 (1980) の理論式の方が誤っていることを指摘した。本稿では, こうした理論式の導き方の一例として, GRANT and WEST (1965) の Ribbon Model 全磁力異常の式がいかにして導かれるかを示す。なお, ここでは z 軸が鉛直下方に向う右手系のデカルト座標 (x, y, z) を使用する。

2. 基本式

一般的に磁気異常のポテンシャル Φ は異常物体 (V) 内の点 (x', y', z') の磁化の強さを $\mathbf{J}$ とすると,

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= - \int_V \mathbf{J} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dV \\ r &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

で与えられ, 磁気異常ベクトルは $\mathbf{A} = -\nabla\Phi$ である。また, 外部磁場を $\mathbf{H}_e = H_e \mathbf{e}$ ($\mathbf{e}$ は単位ベクトル) とすると, $|\mathbf{A}| \ll H_e$ のとき全磁力異常は,

$$\Delta T = \mathbf{e} \cdot \mathbf{A} = -\alpha \cdot \nabla\Phi \quad (2)$$

で与えられる。

磁化の強さ $\mathbf{J}$ が異常物体内で一定のとき $\mathbf{J} = J\mathbf{p}$ ($\mathbf{p}$ は単位ベクトル) とおき, $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ とすると,

$$\begin{aligned} \Delta T &= J [e_1(p_1U_1 + p_2U_2 + p_3U_3) \\ &\quad + e_2(p_1U_2 + p_2U_4 + p_3U_5) \\ &\quad + e_3(p_1U_3 + p_2U_5 + p_3U_6)] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \int_V \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} dV \\ U_2 &= \int_V \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{r} dV \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} U_3 &= \int_V \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{1}{r} dV \\ U_4 &= \int_V \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r} dV \\ U_5 &= \int_V \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{1}{r} dV \\ U_6 &= \int_V \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r} dV \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

となる。あとの計算の簡単のため $\nabla^2(1/r) = 0$ を用いて U_1 を消去 ($U_1 = -U_4 - U_6$ を代入) すると, (3) は,

$$\begin{aligned} \Delta T &= J [(e_1p_2 + e_2p_1)U_2 + (e_1p_3 + e_3p_1)U_3 \\ &\quad + (e_2p_2 - e_1p_1)U_4 + (e_2p_3 + e_3p_2)U_5 \\ &\quad + (e_3p_3 - e_1p_1)U_6] \end{aligned} \quad (5)$$

となる。磁化の方向 $\mathbf{p}$ および外部磁場の方向 $\mathbf{e}$ を角度で表現し, x - y 平面からの伏角, y 軸から x 軸に向って測った偏角をそれぞれ τ, ι および i, λ とすると,

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \cos \tau \sin \iota, & e_1 &= \cos i \sin \lambda \\ p_2 &= \cos \tau \cos \iota, & e_2 &= \cos i \cos \lambda \\ p_3 &= \sin \tau, & e_3 &= \sin i \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで, γ, K, H および β, K_0, H_0 を,

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \tan^{-1} \frac{\tan \tau}{\sin \iota}, & \beta &= \tan^{-1} \frac{\tan i}{\sin \lambda} \\ K &= \cos \gamma \cot \iota, & K_0 &= \cos \beta \cot \lambda \\ H &= \sqrt{1 - \cos^2 \tau \cos^2 \iota}, & H_0 &= \sqrt{1 - \cos^2 i \cos^2 \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

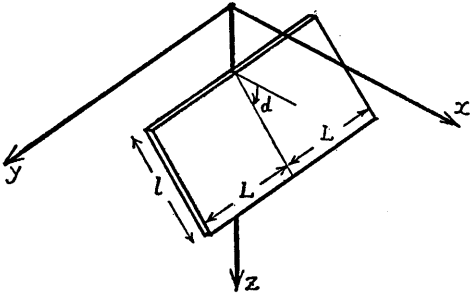
と定義すると,

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= H \cos \gamma, & e_1 &= H_0 \cos \beta \\ p_2 &= H \cdot K, & e_2 &= H_0 \cdot K_0 \\ p_3 &= H \sin \gamma, & e_3 &= H_0 \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

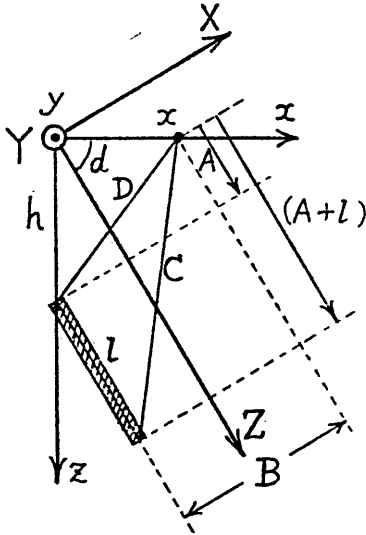
が得られ, これを(5)に代入して整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta T &= J I H I_0 [U_2(K \cos \beta + K_0 \cos \gamma) + U_3 \sin(\beta + \gamma) \\ &\quad + U_4(K K_0 - \cos \beta \cos \gamma) \\ &\quad + U_5(K \sin \beta + K_0 \sin \gamma) \\ &\quad - U_6 \cos(\beta + \gamma)] \end{aligned} \quad (9)$$

* 地質調査所物理探査部



第 1 図 Ribbon Model



第 2 図 Ribbon Model の断面と座標系

3. Ribbon Model の計算 (その 1)

GRANT and WEST (1965) と同様に第 1 図のような Model を考え、第 2 図に示す座標系をとると、

$$\left. \begin{aligned} X &= x \sin d - z \cos d \\ Y &= y \\ Z &= x \cos d + z \sin d \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

である。したがって

$$\left. \begin{aligned} X' &= x' \sin d - z' \cos d \\ Y' &= y' \\ Z' &= x' \cos d + z' \sin d \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

とすると、

$$r = \sqrt{(X-X')^2 + (Y-Y')^2 + (Z-Z')^2} \quad (12)$$

$$\int_V dV = \int_{-L}^L dY' \int_{h \sin d}^{h \sin d + l} dZ' \quad (13)$$

$$X' = -h \cos d \quad (14)$$

ここで、 u, v, w, w_1, w_2 を、

$$u = X - X', \quad v = Y - Y', \quad w = Z - Z' \quad (15)$$

$$w_1 = Z - h \sin d, \quad w_2 = Z - h \sin d - l \quad (16)$$

と定義すると、(12), (13), (10) は次のようになる。

$$r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (17)$$

$$\int_V dV = \int_{v+L}^{v-L} dv \int_{w_1}^{w_2} dw \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= (u + X') \sin d + (w + Z') \cos d \\ y &= v + Y' \\ z &= -(u + X') \cos d + (w + Z') \sin d \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここに、 x, y, z と X', Y', Z' とは互いに独立であるので(19)から、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \sin d \frac{\partial}{\partial u} + \cos d \frac{\partial}{\partial w} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= -\cos d \frac{\partial}{\partial u} + \sin d \frac{\partial}{\partial w} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

が得られる。よって、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \sin d \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \cos d \frac{\partial^2}{\partial v \partial w} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} &= -\sin d \cos d \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \cos 2d \frac{\partial^2}{\partial u \partial w} \\ &\quad + \sin d \cos d \frac{\partial^2}{\partial w^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} &= -\cos d \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \sin d \frac{\partial^2}{\partial v \partial w} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \cos^2 d \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \sin 2d \frac{\partial^2}{\partial u \partial w} \\ &\quad + \sin^2 d \frac{\partial^2}{\partial w^2} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

となる。いま、

$$\left. \begin{aligned} W_0 &= \int_{v+L}^{v-L} dv \int_{w_1}^{w_2} dw \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{1}{r} \right) \\ W_1 &= \int_{v+L}^{v-L} dv \int_{w_1}^{w_2} dw \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{1}{r} \right) \\ W_2 &= \int_{v+L}^{v-L} dv \int_{w_1}^{w_2} dw \frac{\partial^2}{\partial u \partial w} \left(\frac{1}{r} \right) \\ W_3 &= \int_{v+L}^{v-L} dv \int_{w_1}^{w_2} dw \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{1}{r} \right) \\ W_4 &= \int_{v+L}^{v-L} dv \int_{w_1}^{w_2} dw \frac{\partial^2}{\partial v \partial w} \left(\frac{1}{r} \right) \\ W_5 &= \int_{v+L}^{v-L} dv \int_{w_1}^{w_2} dw \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

とおくと(17)より、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \right) \frac{1}{r} = 0$$

となるから $W_0 = -W_4 - W_5$

これを用いると、(4), (18), (21), (22) から、

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= sW_1 \sin d + sW_4 \cos d \\ U_3 &= -sW_2 \cos 2d + sW_3 \sin d \cos d \\ &\quad + sW_5 \sin 2d \\ U_4 &= sW_3 \\ U_5 &= -sW_1 \cos d + sW_4 \sin d \\ U_6 &= -sW_2 \sin 2d - sW_3 \cos^2 d \\ &\quad - sW_5 \cos 2d \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

が得られる。(23)を(9)に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \Delta T &= JsHH_0 [W_1 \{K \sin (d-\beta) + K_0 \sin (d-\gamma)\} \\ &\quad + W_4 \{K \cos (d-\beta) + K_0 \cos (d-\gamma)\} \\ &\quad + W_2 \sin (d-Q) + W_5 \cos (d-Q) \\ &\quad + W_3 (\cos Q \cos d - \cos \beta \cos \gamma \\ &\quad + KK_0)] \end{aligned} \quad (24)$$

となる。ここに、 $Q = \beta + \gamma - d$ である。

一方、(22)の積分を実行すると次の結果を得る。

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \left(\frac{uw_2}{(u^2+v^2)r_2} - \frac{uw_1}{(u^2+v^2)r_1} \right) \Bigg|_{v=y-L}^{v=y+L} \\ W_2 &= \left(\frac{uv}{(u^2+w_2^2)r_2} - \frac{uv}{(u^2+w_1^2)r_1} \right) \Bigg|_{v=y-L}^{v=y+L} \\ W_3 &= \left(\frac{vw_2}{(u^2+v^2)r_2} - \frac{vw_1}{(u^2+v^2)r_1} \right) \Bigg|_{v=y-L}^{v=y+L} \\ W_4 &= \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \Bigg|_{v=y-L}^{v=y+L} \\ W_5 &= \left(\frac{vw_2}{(u^2+w_2^2)r_2} - \frac{vw_1}{(u^2+w_1^2)r_1} \right) \Bigg|_{v=y-L}^{v=y+L} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{u^2+v^2+w_1^2} \\ r_2 &= \sqrt{u^2+v^2+w_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

である。

測定点を x - y 平面内 ($z=0$) に限定すると、(10)より、

$$X = x \sin d, \quad Y = y, \quad Z = x \cos d \quad (27)$$

よって、

$$\left. \begin{aligned} A &= h \sin d - x \cos d \\ B &= x \sin d + h \cos d \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

とおくと、(14)~(16)、(28)より、

$$\left. \begin{aligned} u &= B \\ w_1 &= -A \\ w_2 &= -(A+L) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

となる。(25)、(29)を(24)に代入し(28)を用いて整理すると、

$$\Delta T = JsHH_0 [f(x, y+L) - f(x, y-L)] \quad (30)$$

$$f(x, y) = \frac{v}{C^2 r_2} \{ (x-l \cos d) \cos Q - (h+l \sin d)$$

$$\sin Q \} - \frac{v}{D^2 r_1} (x \cos Q - h \sin Q)$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{B^2+v^2} \left(\frac{A+l}{r_2} - \frac{A}{r_1} \right) \{ BK \sin (d-\beta) \\ &\quad + BK_0 \sin (d-\gamma) + v(\cos Q \cos d - \cos \beta \\ &\quad \cos \gamma + KK_0) \} - \{ K \cos (d-\beta) + K_0 \\ &\quad \cos (d-\gamma) \} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

を得る。ここに、

$$\left. \begin{aligned} D^2 &= B^2 + A^2 = x^2 + h^2 \\ C^2 &= B^2 + (A+L)^2 \\ &= (x-l \cos d)^2 + (h+l \sin d)^2 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

である。この結果は、 $\tau=i$, $\iota=\lambda$ としたとき GRANT and WEST (1965, p 350) の (11-31) 式と一致する。

4. Ribbon Model の計算 (その2)

xyz 座標系の基本式(3)~(5)は、XYZ 系でも同様の式が導ける。いま、座標回転テンソル $\mathbf{R}$ を

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sin d & 0 & -\cos d \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos d & 0 & \sin d \end{pmatrix} \quad (33)$$

で定義し、 $\mathbf{e}' = \mathbf{R}\mathbf{e}$, $\mathbf{p}' = \mathbf{R}\mathbf{p}$ すなわち、

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad (34)$$

とすると、(5)、(4)は、

$$\begin{aligned} \Delta T &= J[(e_1' p_2' + e_2' p_1') U_2' + (e_1' p_3' + e_3' p_1') U_3' \\ &\quad + (e_2' p_2' - e_1' p_1') U_4' + (e_2' p_3' + e_3' p_2') U_5' \\ &\quad + (e_3' p_3' - e_1' p_1') U_6'] \end{aligned} \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} U_2' &= \int_V \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \frac{1}{r} dV \\ U_3' &= \int_V \frac{\partial^2}{\partial X \partial Z} \frac{1}{r} dV \\ U_4' &= \int_V \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \frac{1}{r} dV \\ U_5' &= \int_V \frac{\partial^2}{\partial Y \partial Z} \frac{1}{r} dV \\ U_6' &= \int_V \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \frac{1}{r} dV \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$r = \sqrt{(X-X')^2 + (Y-Y')^2 + (Z-Z')^2} \quad (37)$$

となる。(8)、(33)を(34)に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= H \sin (d-\gamma), \quad e_1' = H_0 \sin (d-\beta) \\ p_2' &= H \cdot K, \quad e_2' = H_0 \cdot K_0 \\ p_3' &= H \cos (d-\gamma), \quad e_3' = H_0 \cos (d-\beta) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

よって、 $Q = \beta + \gamma - d$ とすると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{e_1' p_2' + e_2' p_1'}{HH_0} &= K \sin (d-\beta) \\ &\quad + K_0 \sin (d-\gamma) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{e_1' p_3' + e_3' p_1'}{HH_0} &= \sin(d-Q) \\
 \frac{e_2' p_2' - e_1' p_1'}{HH_0} &= KK_0 \\
 &\quad - \sin(d-\beta) \sin(d-\gamma) \\
 \frac{e_2' p_3' + e_3' p_2'}{HH_0} &= K \cos(d-\beta) \\
 &\quad + K_0 \cos(d-\gamma) \\
 \frac{e_3' p_3' - e_1' p_1'}{HH_0} &= \cos(d-Q)
 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

が得られる。

一方、(36)の積分は(13)、(14)と同一であり、(15)、(16)のように、 u, v, w, w_1, w_2 を定義すると、

$$\left. \begin{aligned}
 U_2' &= sW_1, \quad U_3' = sW_2, \quad U_4' = sW_3, \\
 U_5' &= sW_4, \quad U_6' = sW_5
 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

となる。よって、(39)、(40)を(35)に代入して次式を得る。

$$\begin{aligned}
 \Delta T &= JsHH_0 [W_1 \{K \sin(d-\beta) + K_0 \sin(d-\gamma)\} \\
 &\quad + W_4 \{K \cos(d-\beta) + K_0 \cos(d-\gamma)\} \\
 &\quad + W_2 \sin(d-Q) + W_5 \cos(d-Q) \\
 &\quad + W_3 \{KK_0 - \sin(d-\beta) \sin(d-\gamma)\}]
 \end{aligned} \quad (41)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 \cos Q \cos d - \cos \beta \cos \gamma &= (\cos \beta \cos \gamma \cos d \\
 &\quad - \sin \beta \sin \gamma \cos d + \sin \beta \cos \gamma \sin d \\
 &\quad + \cos \beta \sin \gamma \sin d) \cos d - \cos \beta \cos \gamma \\
 &= -\cos \beta \cos \gamma \sin^2 d - \sin \beta \sin \gamma \cos^2 d \\
 &\quad + \sin \beta \cos \gamma \sin d \cos d + \cos \beta \sin \gamma \sin d \cos d \\
 &= -(\cos \beta \sin d - \sin \beta \cos d)(\cos \gamma \sin d \\
 &\quad - \sin \gamma \cos d) = -\sin(d-\beta) \sin(d-\gamma)
 \end{aligned}$$

であるから、(41)は(24)と一致する。したがって、前節と同様に(25)～(29)を用いて(30)～(32)が得られる。

5. おわりに

以上のように、2通りの方法で Ribbon Model の全磁気異常理論式が導かれる。ここでは、GRANT and WEST (1965)の(11-31)式と結果を比較するために、その形にあうように変形しており、表現がやや複雑になっている。理論式としては、よりすっきりした形の表現が望ましいと思われるので、少し変形した結果を次に掲げる。

$$\Delta T = Js\sqrt{(1-\cos^2 \tau \cos^2 \iota)(1-\cos^2 i \cos^2 \lambda)}$$

$$[f(x, y+L) - f(x, y-L)]$$

$$f(x, v) = \frac{v}{C^2 \sqrt{C^2 + v^2}} \{B \sin(\phi + \psi) - (A+L)$$

$$\begin{aligned}
 &\cos(\phi + \psi)\} \\
 &\quad - \frac{v}{D^2 \sqrt{D^2 + v^2}} \{B \sin(\phi + \psi) - A \cos(\phi + \psi)\} \\
 &\quad - \frac{1}{B^2 + v^2} \left(\frac{A+L}{\sqrt{C^2 + v^2}} - \frac{A}{\sqrt{D^2 + v^2}} \right) \{ (K \sin \phi + \\
 &\quad K_0 \sin \phi) B + (KK_0 - \sin \phi \sin \psi) v \} \\
 &\quad - (K \cos \phi + K_0 \cos \psi) \left(\frac{1}{\sqrt{C^2 + v^2}} - \frac{1}{\sqrt{D^2 + v^2}} \right)
 \end{aligned}$$

$$C^2 = B^2 + (A+L)^2, \quad D^2 = B^2 + A^2$$

$$B = x \sin d + h \cos d, \quad A = h \sin d - x \cos d$$

$$\phi = d - \beta, \quad K_0 = \cos \beta \cot \lambda, \quad \beta = \tan^{-1}(\tan i / \sin \lambda)$$

$$\psi = d - \gamma, \quad K = \cos \gamma \cot \iota, \quad \gamma = \tan^{-1}(\tan \tau / \sin \iota)$$

また、磁化の方向が外部磁場の方向に等しいとき、
 $\Delta T = Js(1 - \cos^2 i \cos^2 \lambda) [f(x, y+L) - f(x, y-L)]$

$$f(x, v) = \frac{v}{C^2 \sqrt{C^2 + v^2}} \{B \sin 2\phi - (A+L) \cos 2\phi\}$$

$$- \frac{v}{D^2 \sqrt{D^2 + v^2}} (B \sin 2\phi - A \cos 2\phi)$$

$$- \frac{1}{B^2 + v^2} \left(\frac{A+L}{\sqrt{C^2 + v^2}} - \frac{A}{\sqrt{D^2 + v^2}} \right) \{2BK \sin \phi \\
 + (K^2 - \sin^2 \phi) v\}$$

$$- 2K \cos \phi \left(\frac{1}{\sqrt{C^2 + v^2}} - \frac{1}{\sqrt{D^2 + v^2}} \right)$$

$$C^2 = B^2 + (A+L)^2, \quad D^2 = B^2 + A^2$$

$$B = x \sin d + h \cos d, \quad A = h \sin d - x \cos d$$

$$\phi = d - \beta, \quad K = \cos \beta \cot \lambda, \quad \beta = \tan^{-1}(\tan i / \sin \lambda)$$

これら両式に見られるように、モデルの傾斜 d は式の上に陽には現われず、磁化の方向などと等価になっている。したがって、GRANT and WEST (1965)も述べているように、測定された磁気異常から岩体の傾斜を求めることは非常に難しいが、磁化方向を事実反して仮定しても深度解析の上ではあまり大きな影響を及ぼさない。このことはすべての傾斜モデルにあてはまることであるが、磁気異常の深度解析にあたっては、別の情報として岩体の傾斜もしくは磁化方向が与えられる場合を除き、通常、磁化方向が外部磁場方向に一致するものとして解析が行なわれる。

引用文献

- 1) GRANT, F.S. and G.F. WEST (1965): Interpretation theory of applied geophysics, McGraw-Hill, New York.
- 2) 小山史郎 (1980): Ribbon Model の全磁気異常について、物理探鉱, vol. 33, no. 2, pp. 92-96.

- 3) 村上裕・中塚正 (1981): "Ribbon Model の全磁力異常について" (小山史郎, 物理探鉱, 第33巻, 第2号, pp.92-96, 1980) について, 物理探鉱, vol. 34, no. 2 pp. 42-43.